

Cristais Fotônicos e Bandas Fotônicas

Flavio Pinto De Almeida Filho.
Instituto de Física de São Carlos.
flavio.pin.filho@usp.br

1 RESUMO:

Este trabalho tem por objetivo trazer uma breve menção histórica dos estudos sobre cristais fônicos, bem como uma análise de maneira qualitativa sobre os efeitos de *band gap*, dando assim uma interpretação física dos fenômenos e, por fim, uma abordagem quantitativa, dedução da equação mestra e a aplicação da mesma.

2 INTRODUÇÃO:

A estrutura denominada cristal fotônico tem seu termo cunhado devido a sua organização periódica, fornecido por uma variação periódica da sua constante dielétrica, não tendo relação direta com substâncias cristalinas, mas apresentam uma semelhança estrutural. Assim como nos cristais semicondutores, seus equivalentes fotônicos apresentam também uma banda de energia proibida, no caso, frequências proibidas, denominadas como *gap fotônico*. Os primeiros cristais fotônicos não foram observados em laboratórios, mas sim observados na natureza selvagem, como por exemplo, formação de cores nas asas das borboletas, besouros e peixes^[1,2].



Figura 1: Exemplos de Cristais fônicos encontrados na vida selvagem.

O cientista conhecido como Lord Rayleigh, foi o primeiro a investigar a propagação de ondas num material cristalino^[3]. Durante o século XX, mais precisamente no final da década de 60, com a invenção do laser, uma fonte opticamente intensa e coerente, juntamente com as fibras ópticas, foi possível revolucionar a área de telecomunicação. O laser proporcionou uma maior taxa de transmissão de informação em meios dielétricos do que elétrons em metais. Nascendo uma nova área de pesquisa e aplicação denominada fotônica. A partir desse marco, houve um grande avanço e interesse em desenvolver dispositivos que fossem capazes de controlar e manipular a luz. Com esse advento e estímulo científico, em 1972, Bykov, publicou um artigo descrevendo a possibilidade de utilizar estruturas periódicas para o controle de emissão espontânea^[4], mas somente em 1987, Yablonovitch conseguiu um progresso expressivo ao modificar a emissão espontânea com o controle de propagação da radiação, usando estruturas periódicas bidimensionais e tridimensionais^[5]. Atualmente a comunidade científica tem um grande interesse em cristais fotônicos por seu grande potencial tecnológicos, como a construção de guias de onda, chips ópticos e controle e emissão de radiação e gerenciamento de informações^[6].

3 CRISTAIS FOTÔNICOS:

Cristais fotônicos são estruturas inseridas em uma nova classe óptica por apresentarem uma modulação periódica do índice de refração. Essa característica se torna importante para várias aplicações

tecnológicas e naturais. Há 3 tipos de geometria de estrutura, (1D), na qual a modulação da permissividade ocorre em apenas uma direção, como por exemplo espelhos de Bragg, que é amplamente utilizado como refletores de cavidade lasers, revestimento antirreflexo entre outros. Bidimensionais (2D), na qual a periodicidade ocorre ao longo de um plano, por outro lado, se a rede periódica estendo ao logo dos 3 eixos, o cristal é denominado tridimensional (3D)^[7].

Nesse trabalho, será estudado apenas cristais fotônicos de (1D), por sua facilidade algébrica de se trabalhar matematicamente, bem como dar intuição física que pode ser expandida para outras dimensões em questão.

4 CRISTAIS FOTÔNICOS (1D):

Nessa parte, vamos introduzir uma visão física, com o objetivo de apenas apresentar um sentido qualitativo ao problema, podendo ser expandido para cristais em 2D e 3D.

Apresentamos um material com índice de refração n_2 e n_1 formando uma unidade que se repete periodicamente a cada distancia Λ .

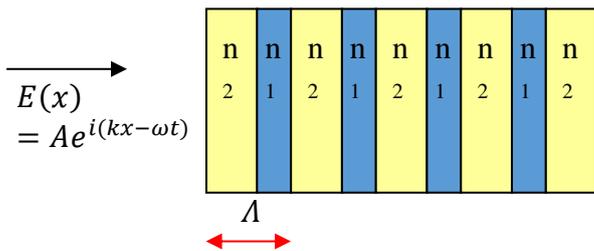


Figura 2: Modelo de Cristal Fotônico (1D).

Considerando a incidência normal do campo \vec{E} e a diferença dos índices de refração:

$$\Delta n = n_2 - n_1 \quad (1)$$

O coeficiente de reflexão de Fresnel é dado por:

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (2)$$

Usando a aproximação de que $\Delta n \ll 1$, temos que:

$$R = -\frac{\Delta n}{2n} \quad (3)$$

Temos dois tipos de reflexões. A primeira sendo na interface vinda de n_1 (1→2) e a segunda, incidência na interface vinda de n_2 (2→1).

Portando, para (1→2).

$$E_{r,12} = -\frac{\Delta n}{2n} A [1 + e^{-i\delta} + e^{-i2\delta} + e^{-i(N-1)\delta}] \quad (4)$$

Sendo:

$$\delta = k(2\Lambda) = \frac{4\pi n \Lambda}{\lambda_0} \quad (5)$$

Para (2→1)

$$E_{r,21} = -\frac{\Delta n}{2n} A e^{-i\frac{\delta}{2}} [1 + e^{-i\delta} + e^{-i2\delta} + e^{-i(N-1)\delta}] \quad (6)$$

Podemos observar que os termos dentro das chaves dão máximos quando:

$$\delta = 2\pi m \quad (7)$$

Sendo $m = 1$ (primeira ordem de difração)

$$\delta = 2\pi \quad (8)$$

Igualando com a equação (5) com a (8)

$$\frac{4\pi n \Lambda}{\lambda_0} = 2\pi \quad (9)$$

Finalmente encontramos o comprimento de onda de Bragg:

$$\lambda_b = 2n\Lambda \quad (10)$$

Neste caso, quando a condição de $\delta = 2\pi m$ é satisfeita, encontramos uma reflexão total para onda incidente, com o respectivo comprimento de onda λ_b .

Nestas mesmas condições, podemos calcular a potência refletida, denominada reflexão de Bragg.

$$R_{max} = \left| \frac{E_r}{E_i} \right|^2 = N^2 \left(\frac{\Delta n}{n} \right)^2 \quad (11)$$

Podemos obter uma reflexão mais eficiente quando o comprimento de onda da luz satisfaz a condição da equação (10).

5 GAP FOTÔNICO:

Segundo a equação (11), podemos ver uma dependência quadrática com N (quantidade de padrão de repetição), ou seja, quanto maior for N, temos um limite de $R \rightarrow 100\%$ e $T \rightarrow 0\%$.

Nas condições físicas reais, não conseguimos obter um comprimento da onda de Bragg específico, mas sim, uma região, na qual, a onda será atenuada e não será transmitida.

$$\lambda_b - \frac{\Delta\lambda}{2} < \lambda < \lambda_b + \frac{\Delta\lambda}{2} \quad (12)$$

Portanto, comprimentos de onda fora deste intervalo, serão transmitidos, não havendo alteração de amplitude, mas sim, a modificação das velocidades para seus respectivos comprimentos de onda. Como a energia do fóton é calculada:

$$h\nu = \omega\hbar \quad (13)$$

Isto equivale a dizer que há um *gap* nos estados de energia do sistema. Levantando uma analogia com o processo que ocorre em sólidos, manifestado pela presença de bandas na relação de dispersão eletrônica devido a interação dos elétrons com o potencial periódico de uma rede cristalina. Outro ponto a ser discutido é a relação de dispersão $\omega(k)$ dos fótons em um material com *band gap* fotonico. Como conhecido, sabemos que para um material homogêneo de índice n :

$$\omega = \frac{c}{n}k \quad (14)$$

Considerando que não temos dispersão, ou seja, n não depende de ω , temos a seguinte curva de dispersão.

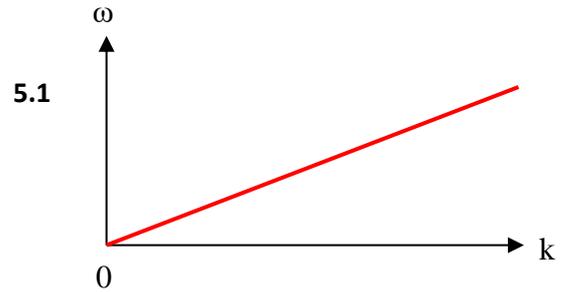


Figura 3: Relação de dispersão para um material com índice de refração constante.

Introduzindo uma rede periódica, como na **figura 2**, encontramos uma reflexão de Bragg para λ_b , seu valor de k correspondente:

$$k_b = \frac{2\pi}{\lambda_b} = m \frac{\pi}{\Lambda} \quad (15)$$

Encontramos então para o k , soluções do tipo:

$$\frac{\pi}{\Lambda}, \frac{2\pi}{\Lambda}, \frac{3\pi}{\Lambda} \dots$$

Consequentemente, a onda se torna não propagante, tendo sua velocidade de grupo indo a zero.

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = 0 \quad (16)$$

Neste caso, a curva de dispersão, torna-se:

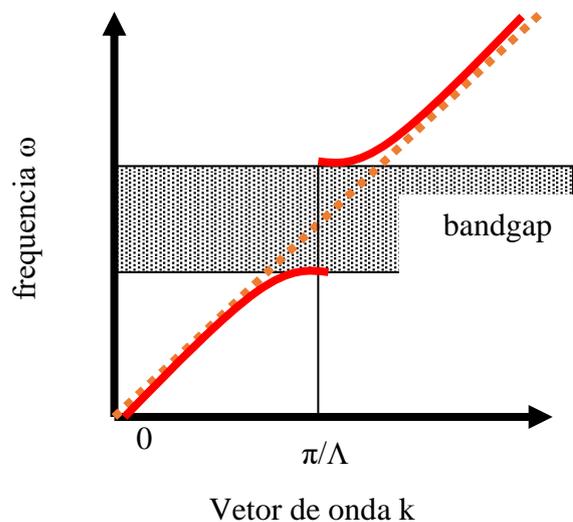


Figura 4: Relação de dispersão para um material com índice de refração periódico.

Podemos observar que no valor de $\frac{\pi}{\Lambda}$, abre-se um *gap*, por sua velocidade de grupo ser nula, não há propagação da onda no material. É notável também, que nesse mesmo ponto, há dois valores de ω para $\frac{\pi}{\Lambda}$. Porém na condição de Bragg, não existe uma onda propagante, mas sim uma onda estacionária, criada pela superposição de duas ondas contra-propagantes. Concluímos que a origem das duas frequências, podem ser entendidas considerando duas ondas estacionárias Possíveis

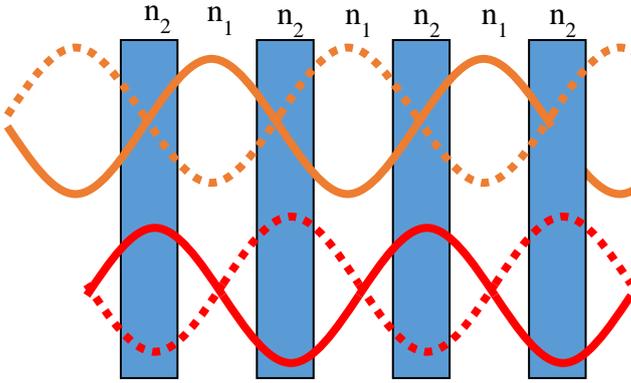


Figura 4: Formação das ondas estacionárias dentro do material, dando origem ao gap fotônico.

As duas frequências formadas em seu determinado k , podem ser interpretadas como vindo destes dois perfis de intensidade deslocados de $\frac{\pi}{2}$ radiano.

Segundo a equação (11), esse resultado implica que quanto o maior Δn , sua quantidade de regiões periódicas Λ , leva a um maior *gap*. Como dito anteriormente, embora a dedução foi feita para um sistema de várias camadas em 1D, essa conclusão também é verdade para sistemas de 2D e 3D.

6 EQUAÇÃO MESTRA:

Para uma solução geral, para cristais de 2D e 3D, é descrito por uma combinação das equações de Maxwell. Relacionando-as da forma a seguir.

$$\nabla \cdot H(r, t) = 0 \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \epsilon(r) \cdot E(r, t) = 0 \quad (18)$$

$$\nabla \times E(r, t) + \mu \frac{\partial H(r, t)}{\partial t} = 0 \quad (19)$$

$$\nabla \times H(r, t) + \epsilon(r) \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

Substituindo as devidas expressões em \vec{E} , derivando, dividindo as equações por $\epsilon(r)$ e considerando $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, encontramos a famosa equação mestra:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(r)} \nabla \times H(r) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 H(r) \quad (21)$$

Essa equação fornece duas incógnitas, a frequência e o campo \vec{H} , podemos então determinar os modos do sistema, através de uma equação de autovalores cujo operador é hermitiano.

$$\ominus H = \omega/c^2 \quad (22)$$

Podemos observar a notável semelhança ao do caso eletrônico, no caso, a função de onda deve satisfazer a equação de Schrodinger, enquanto o campo H deve satisfazer a equação mestra (21). Do ponto de vista matemático, a determinação de autofunções em cristais fotônicos é similar aos cálculos das funções de onda dos elétrons na física de estado sólido, assim obtendo a estrutura de bandas fotônicas.

Para testar a validade da equação (21), vamos realizar o cálculo para um material com índice de refração constante.

Pelo teorema de Bloch, as autofunções de um meio periódico podem ser representadas por uma onda plana multiplicada por uma função periódica com a periodicidade da rede.

$$H(x) = h(x)e^{ikx} \quad (23)$$

Sendo T o período da rede.

$$h(x) = h(x + T) \quad (24)$$

Como se trata de um material com índice de refração constante, temos:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon \quad (25)$$

Aplicando o rotacional na equação (21):

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (he^{ikx})}{\partial x} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 he^{ikx} \quad (26)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} hk^2 e^{ikx} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 he^{ikx} \quad (27)$$

Obtendo assim a relação já conhecida equação (14).

$$k = \frac{n\omega}{c} \quad (14)$$

Portando, a equação geral a ser resolvida, para um problema geral de qualquer dimensão tem a forma:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon(x)} \frac{\partial (h(x)e^{ikx})}{\partial x} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 h(x)e^{ikx} \quad (28)$$

7 CONCLUSÃO:

Com o advento da fotônica, no início da década de 60, houve o grande interesse científico para dispositivos que fossem capazes de controlar a natureza da luz. Em meio desse processo, Yablonovitch^[5], redescobriu o cristal fotônico, estes que já foram observados desde sempre na natureza selvagem. Podemos ver que um material com uma periodicidade em sua constante dielétrica, atua como um espelho de Bragg, refletindo comprimento de onda específico, fornecido pela equação (10). Podemos notar que há uma formação de ondas estacionárias dentro do material, para esses determinados comprimentos de onda, gerando assim, o efeito de *band gap*. Nesse caráter qualitativo, os resultados obtidos podem ser diretamente aplicados à cristais fotônicos bidimensionais e tridimensionais. Para uma análise quantitativa, apoiado nas equações de Maxwell, podemos deduzir a equação mestra, esta que rege todo o fenômeno eletromagnético. Encontrada a equação (28) e conhecendo as propriedades do material, é possível uma descrição completa do problema, para qualquer dimensão.

8 REFERENCIA:

[1]- VUKUSIC, P.; SAMBLES, J. R. **Photonic structures in Biology**. Nature, v. 424,

9 P. 853–855, 2004

[2]- VUKUSIC, P.; STAVENGA, D. G. Physical methods for investigating structural **colours in biological systems**. Journal of The Royal Society Interface, v. 6, n. Suppl 2, p. S133–S148, 2009.

[3]- RAYLEIGH, L. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a **periodic structure**. Philosophical Magazine and Journal of Science, v. 24, p. 145–159, 1887.

[4]- KAPRIELIAN, Z. A. Electromagnetic Transmission Characteristics of a Lattice of Infinitely Long Conducting Cylinders. Journal of Applied Physics, v. 27, p. 1491 – 1502, 1956.

[5]- YABLONOVITCH, E. Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics **and Electronics**. Physical Review Letters, v. 58, p. 2059–2062, 1987.

[6]- SHADBOLT, P. J. et al. Generating, manipulating and measuring entanglement and mixture with a reconfigurable photonic circuit. Nature Photonics, Published online, p. 45–49, 2011.

[7] - J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, **Photonic Crystals: Molding the Flow of Light** (Princeton, September 1995).